جبر لي الخارج :

مبرهنة :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R و I مثالية في A . لنعرف على A علاقة ρ بالشكل

$$\forall a,b \in A \ , \ a\rho b \Leftrightarrow a-b \in I$$

ان ρ علاقة تكافؤ , ونرمز لجمع صفوف تكافؤ العلاقة ρ بالشكل

$$A/I = \{ a+I \ ; \ a \in A \}$$

نعرف على الجمعة A/I العمليات الآتية :

فإن $\forall \ a+I \ , \ b+I \in A/I \quad \forall \lambda \in R$:

① $(a+I) + (b+I) = (a+b) + I$

② $\lambda(a+I) = \lambda a + I$

③ $[a+I , b+I] = [a,b] + I$

ان الثلاثية $(A/I , + , [\,,\,])$ تشكل جبر لي فوق R يسمى جبر لي الخارج

البرهان :

واضح ان $(A/I , +)$ موديول فوق R

$$[a+I , a+I] = [a,a] + I = 0 + I = I$$

$\forall \ a+I \ , \ b+I \ , \ d+I \in A/I$; $[a+I , (b+I)+(d+I)] =$

$$= [a+I , (b+d)+I]$$
$$= [a , b+d] + I$$
$$= ([a,b] + [a,d]) + I$$
$$= [a,b]+I + [a,d] + I$$

بطريقة مشابهة نجد أن

$$[(a+I)+(b+I) , d+I] = [a+I , d+I] + [b+I , d+I]$$

$\forall\, a+I,\ b+I \in A/I \qquad \forall\, \lambda \in R$

$$\lambda[a+I,\ b+I] = \lambda[a,b]+I = \lambda[a,b]+I = [\lambda a, b]+I$$
$$= [\lambda a+I,\ b+I]$$
$$= [\lambda(a+I),\ b+I]$$

$\forall\, a+I,\ b+I,\ c+I \in A/I$

$$[a+I,[b+I,c+I]]+[b+I,[c+I,a+I]]+[c+I,[a+I,b+I]] = 0$$

$$[a+I,[b+I,c+I]] = [a+I,\ [b,c]+I]$$
$$= [a,[b,c]]+I \quad \text{①}$$

$$[b+I,[c+I,a+I]] = [b+I,\ [c,a]+I]$$
$$= [b,[c,a]]+I \quad \text{②}$$

$$[c+I,[a+I,b+I]] = [c+I,\ [a,b]+I]$$
$$= [c,[a,b]]+I \quad \text{③}$$

بجمع ① و ② و ③ ينتج

$$([a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]])+I = 0+I = I \rightarrow$$ صفري A/I

تعريف :

ليكن A, B جبريي لي نفس الحقل R نقول عن التطبيق $f: A \rightarrow B$ أنه

تشاكل جبور لي إذا حقق

① : $\forall\, x,y \in A \quad \forall\, \lambda \in R$; $f(x+y) = f(x)+f(y)$

② $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

③ $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$

ونقول عن f أنه تماثل إذا كان بالإضافة إلى ذلك متباين وغامر ونقول في هذه

الحالة إن A يماثل B ونرمز لذلك $A \cong B$

تماثل ← تشاكل + تباين + غامر

مبرهنة :

ليكن $f: A \rightarrow B$ تشاكل جبور لي عندئذ :

① $Im(f)$ جبر جزئي في B

② $ker(f)$ مثالي في A

البرهان.

(1) $Im(f)$ جبر جزئي في B (حسب تعريف سابقة)

$\forall x, y \in Im f; \quad x = f(a)$

$y = f(b) \quad \forall a, b \in A$

$[x, y] = [f(a), f(b)] = f(\underbrace{[a, b]}_{\in A}) \in Im f$

② إن $ker f$ مثالي في A

$\forall a \in A, \; d_a(ker f) \subseteq ker f$ حسب المثالية

$\forall x \in ker f \Rightarrow d_a(x) = [a, x]$

تشاكل جبري $\Rightarrow f([a, x]) = [f(a), f(x)] = [f(a), 0] = 0$

$\Rightarrow [a, x] \in ker f$

ومنه فإن النواة مثالية في A

مبرهنة التشاكل الأولى:

ليكن $f: A \to B$ تشاكل جبري عندئذ

① $A/_{ker f} \cong Im f$

② إذا كان f غامر فإن

$A/_{ker f} \cong B$

مبرهنة:

ليكن A جبر لي فوق الحقل R و J ، I مثاليين في A عندئذ كل من $I+J$ ،

$I \cap J$ مثالي في A

$I + J = \{a + b ; a \in I, b \in J\}$

$A \supseteq I + J \neq 0$ (لأن $0 = 0 + 0 \in I + J$)

$\forall x, y \in I + J \quad \forall \lambda \in R$

لأن $x = a + b$ ، $y = a_1 + b_1$ ، $\forall a, a_1 \in I$ ، $b, b_1 \in J$

$$x - y = (a+b) - (a_1+b_1) = \underbrace{(a-a_1)}_{\in I} + \underbrace{(b-b_1)}_{\in J} \in I + J$$

$$\lambda x = \lambda(a+b) = \underbrace{\lambda a}_{\in I} + \underbrace{\lambda b}_{\in J} \in I + J$$

$$\forall c \in A : d_c(I+J) \subseteq I + J$$

لدينا $z \in I + J$ حيث $z = a_2 + b_2$ ومنه $\forall a_2 \in I , b_2 \in J$

$$d_c(z) = [c, z] = [c, a_2 + b_2] = [c, a_2] + [c, b_2]$$

$$= d_c(a_2) + d_c(b_2) \in d_c(I) + d_c(J)$$

$$\Rightarrow d_c(z) \subseteq I + J$$

$\Leftarrow$ $I + J$ مثالي في A

انتهى الحل